

MAI 2 - domácí úkol ze cvičení 1

Integrály:

Na maximálních možných intervalech najděte primitivní funkci :

1. Jednoduché příklady:

$$\int (5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}) dx ; \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx ; \int \operatorname{tg}^2 u du ;$$
$$\int (3x - 2)^6 dx ; \int \sqrt[3]{(1 - 2x)^2} dx ; \int \frac{1}{5 - x} dx ; \int \frac{1}{(3x + 1)^5} dx ;$$
$$\int \frac{1}{9 + x} dx ; \int \frac{1}{9 + x^2} dx ; \int \frac{1}{1 + 9x^2} dx ; \int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx ;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx ;$$

2. Integrace per partes (aspoň tři příklady):

$$\int x^2 \cos x dx ; \int x^3 \ln x dx ; \int \ln^2 x dx ; \int x \operatorname{arctg} x dx ; \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx$$
$$\int \sin^2 x dx \text{ nebo } \int \cos^2 x dx ;$$
$$\int x^n e^x dx \quad , \quad n \in \mathbb{N} .$$

A chcete-li,

1) promyslete užití Lagrangeovy věty o střední hodnotě funkce:

a) Ukažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí nerovnosti

(i) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;

(ii) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Zkuste zobecnit.

b) Spočítejte (s užitím věty o střední hodnotě a srovnejte s „dřívějším“ způsobem výpočtu limity):

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$; (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}})$.

nebo

2) vyberte si a promyslete některou z úloh na aplikaci extrémů funkce (z příkladů ze cvičení 1).